UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Faculdade de Engenharia
Departamento de Engenharia Cartográfica

Complementos de Matemática para a Cartografia

Capítulo I

GEOMETRIA DA ESFERA

Prof. MAURO PEREIRA DE MELLO
Mat.5540-0

GEOMETRIA DA ESFERA

GEOMETRIA

A geometria, contextualizada ao campo da matemática, ocupa-se das relações mútuas dos pontos, linhas, superfícies e sólidos, considerados desprovidos de outras propriedades que não as consequentes da extensão, da forma e da posição ou da diferença de posição, ou seja, a situação relativa. Desse ponto de vista, a geometria é a área da matemática que estuda as propriedades métricas do espaço físico, espaço caracterizado por um conjunto de pontos para os quais está definida, dois a dois, uma noção de distância, a métrica.

A representação da geometria consiste em se obter uma discretização do espaço, dos objetos do espaço e das equações que relacionam os diversos elementos geométricos.

GEOMETRIA DA ESFERA

GEOMETRIA

O vocábulo geometria tem a sua origem no grego clássico, com o significado de "***medir a Terra***" (*geo* = Terra, *metron* = medir). Na teorização de uma Terra plana, os geômetras primitivos lidavam com medições de segmentos de linhas, ângulos e outras figuras sobre o plano.

Gradualmente o significado do vocábulo foi ampliado para conter o estudo das linhas e planos no espaço comum dos sólidos, e o estudo da espacialidade baseada em sistemas de coordenadas, onde pontos são representados por conjuntos de números - *coordenadas*, e linhas por conjuntos de pontos, cujas coordenadas satisfazem equações lineares.

Durante o último século o campo da geometria foi ampliado para incluir o estudo dos espaços abstratos, em que pontos; linhas e planos podem ser representados das formas as mais variadas.

GEOMETRIA DA ESFERA

GEOMETRIA

Para descrever e caracterizar os pontos do espaço se introduz um sistema de coordenadas. Desse modo, o desenvolvimento da geometria se realiza analiticamente, os objetos geométricos, bem como as relações entre eles, são traduzidos em equações. ***A noção de distância se traduz por uma métrica, função definida entre pares de pontos do espaço***. Ao estudo da geometria por meio das coordenadas, denomina-se geometria analítica.

O espaço euclidiano é o espaço que contém os objetos comuns da geometria: linhas, círculos, esferas, dentre outros. O espaço n-dimensional euclidiano confunde-se com o $\mathfrak{R}^n$, o conjunto de todos os n-tuplos (x_1, x_2, ..., x_n) **de números reais. A notação** $\mathcal{E}^n$ simboliza o espaço euclidiano n-dimensional.

GEOMETRIA DA ESFERA

GEOMETRIA EUCLIDIANA

Por ser absolutamente homogêneo, cada local no espaço euclidiano se apresenta absolutamente idêntico a qualquer outro. Esta uniformidade do espaço euclidiano responde pela principal característica da ***GEOMETRIA EUCLIDIANA***, a partir da qual se pode mover qualquer objeto no interior do espaço euclidiano sem introduzir qualquer modificação em suas dimensões e forma. Objetos distantes podem ser comparados sem qualquer alteração de suas formas, por deslocamento e superposição.

No espaço euclidiano a realização de medições é possível porque se pode mover os instrumentos de medição de um lugar para o outro, sem perturbar a precisão do experimento. Os instrumentos para medição mais importantes para a geometria euclidiana são: o escalímetro (para a medida de distâncias), o transferidor (para a medida dos ângulos) e um sentido de orientação ou sentido de rotação, para se distinguir entre rotações horárias e anti-horárias.

GEOMETRIA DA ESFERA

TRANSFORMAÇÕES

A transformação T: $\Re^n \rightarrow \Re^n$, realizada no espaço $\Re^n$, associa a cada ponto $p \in \Re^n$ o ponto $T(p) \in \Re^n$.

Quando se discute as transformações em geral, comumente se utiliza os vocábulos *mapeamento* ou *função* como sinônimos de transformação, pois esta é uma regra matemática que permite mapear o domínio de u,a função em seu contradomínio e o inverso.

Ao movimento dos objetos do espaço físico associam-se as transformações. Por exemplo, o movimento de um corpo rígido no espaço caracteriza-se por uma mudança na posição e na orientação do corpo. Essas mudanças podem ser convenientemente descritas utilizando-se reflexões, translações e rotações no espaço.

O uso das transformações em geometria está relacionado com aplicações de grande importância: as mudanças ou transformações de coordenadas e a caracterização da geometria dos corpos ou figuras em movimento.

GEOMETRIA DA ESFERA

TRANSFORMAÇÕES

Os objetos movidos no espaço de um lugar a outro tem a trajetória do movimento descrita por funções. Uma função:

$T:\mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$

lida como, T é uma função do espaço euclidiano no espaço euclidiano que toma cada ponto P $\in \mathcal{E}^n$ e o movimenta para uma nova posição T(P) $\in \mathcal{E}^n$, ou seja, dito de outra forma, T(P) é uma transformação em $\mathcal{E}^n$, que atua sobre o ponto P.

Se S é um conjunto de pontos, então $T(S) = \{T(P)|P \in S\}$ é o conjunto que resulta da aplicação da função T a todos os pontos em S, sendo os pontos do domínio de T(S) ditos imagens ou transformadas, daqueles em S.

GEOMETRIA DA ESFERA

MÉTRICA EUCLIDIANA

Para medir distâncias no espaço euclidiano, devemos definir uma métrica. Este conceito pode ser obtido com a introdução do produto interno euclidiano:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

a partir do conceito de produto interno obtemos as noções de comprimento de um vetor e do ângulo entre dois vetores, senão vejamos:

- o comprimento ou módulo de um vetor se calcula a partir do produto interno

$$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- o ângulo θ entre dois vetores não nulos u e v é definido fazendo-se:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

GEOMETRIA DA ESFERA

MÉTRICA EUCLIDIANA

A partir do comprimento de um vetor, definimos a distância d(P,Q) entre os pontos P e Q do espaço por d(P,Q)=|P-Q|.

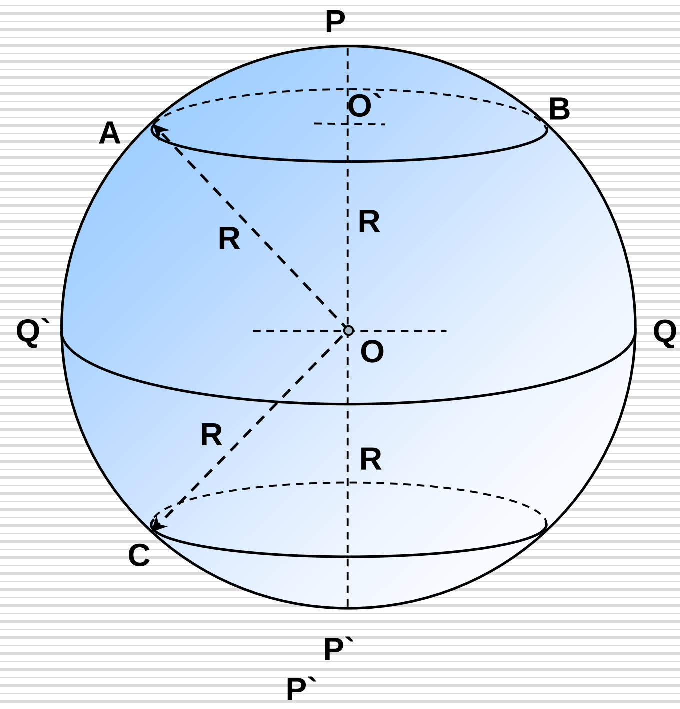
Note que como o espaço vetorial tem uma origem O, que corresponde ao vetor nulo, estamos identificando pontos com vetores P=OP.

A notação d(P,Q) significa a distância de um ponto P a outro ponto Q no espaço. Sendo o elemento nulo d(P,P)=0.

GEOMETRIA DA ESFERA

A ESFERA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

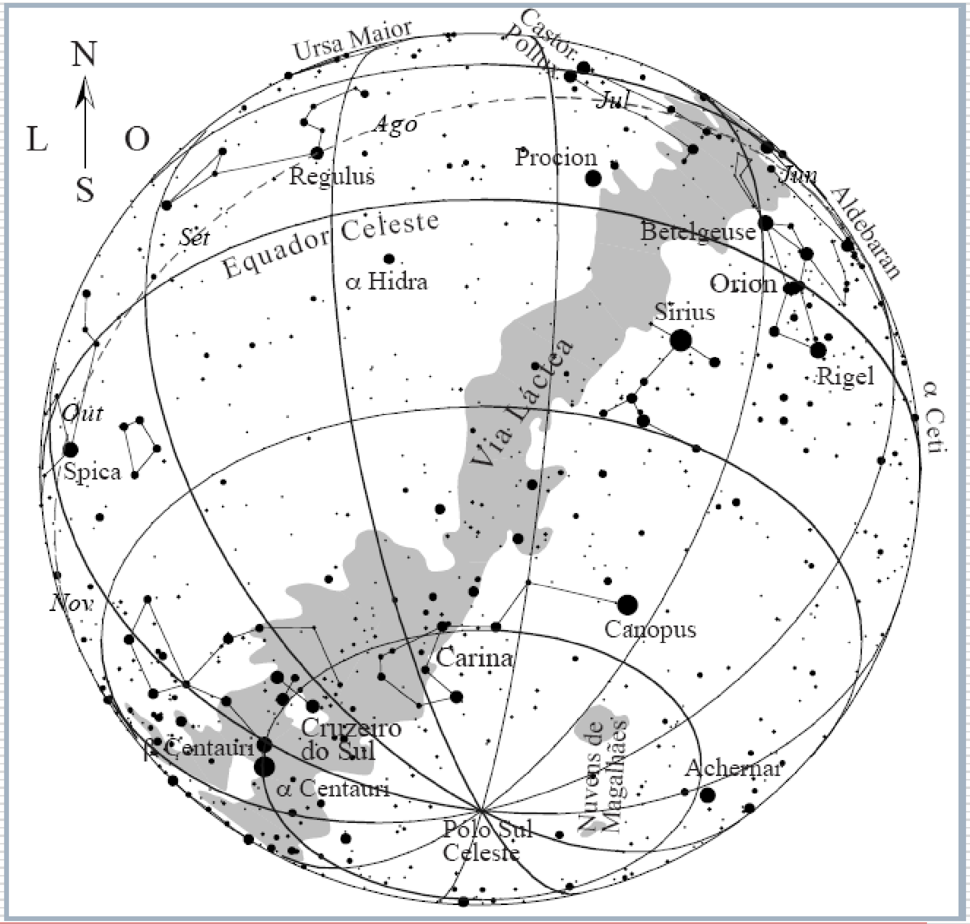
A ESFERA pode ser definida como sendo o lugar geométrico dos pontos do espaço euclidiano equidistantes de um ponto tomado como central na distribuição dos pontos que descrevem a superfície.



GEOMETRIA DA ESFERA

A ESFERA CELESTE

Representação esférica do universo, a esfera celeste, com algumas das principais constelações, o equador e o pólo sul celeste, e a trajetória aparente do sol (linha tracejada).

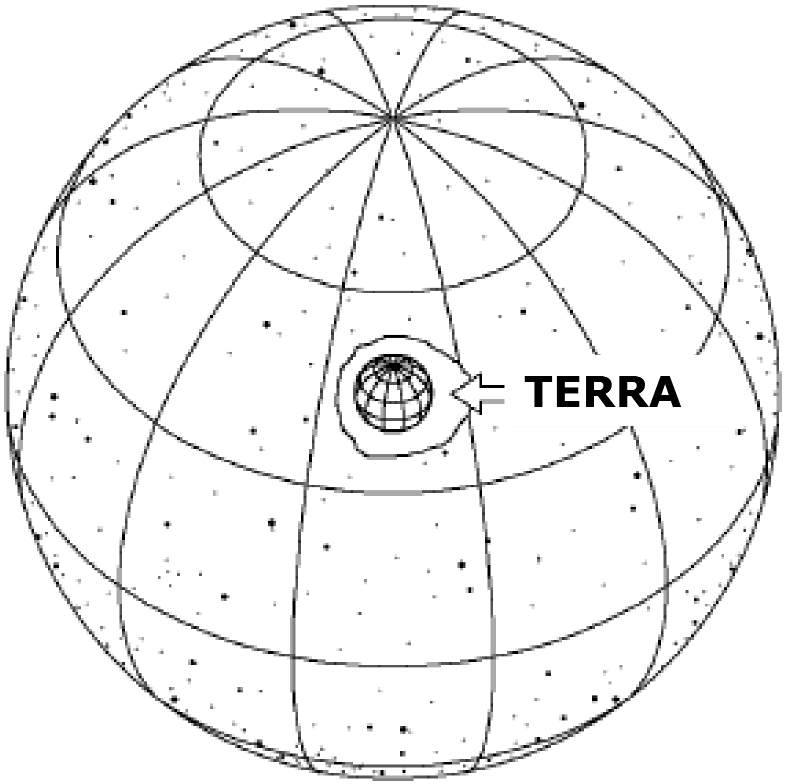


GEOMETRIA DA ESFERA

ESFERA CELESTE e ESFERA TERRESTRE

Representação da Esfera Celeste e Esfera Terrestre na clássica visão ptolomaica, em que o centro do Universo coincide com o centro da Terra; as esferas concêntricas.

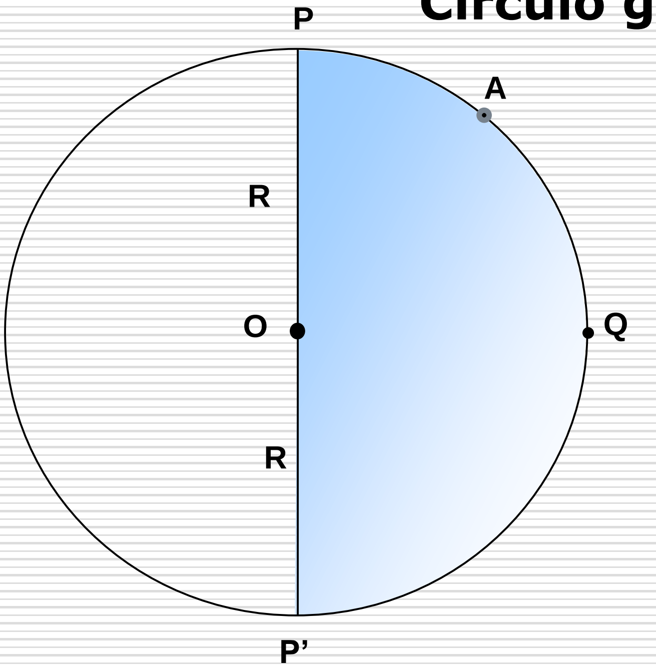
Nessa concepção as duas esfera possuem um centro geométrico comum.

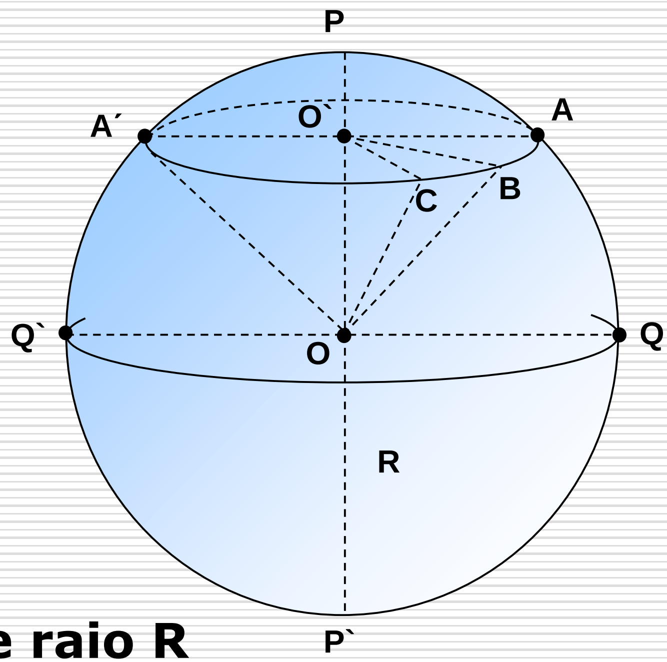


GEOMETRIA DA ESFERA

A ESFERA COMO SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Círculo gerador de raio R

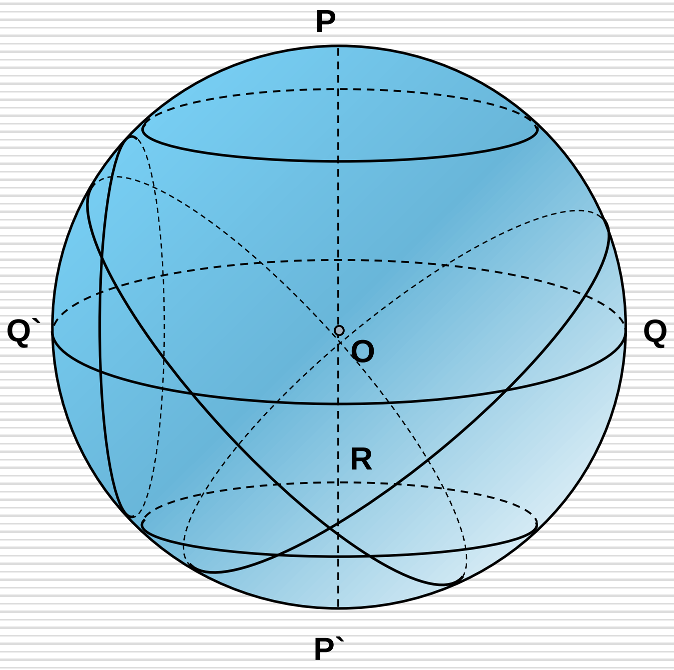




Esfera gerada de raio R

GEOMETRIA DA ESFERA

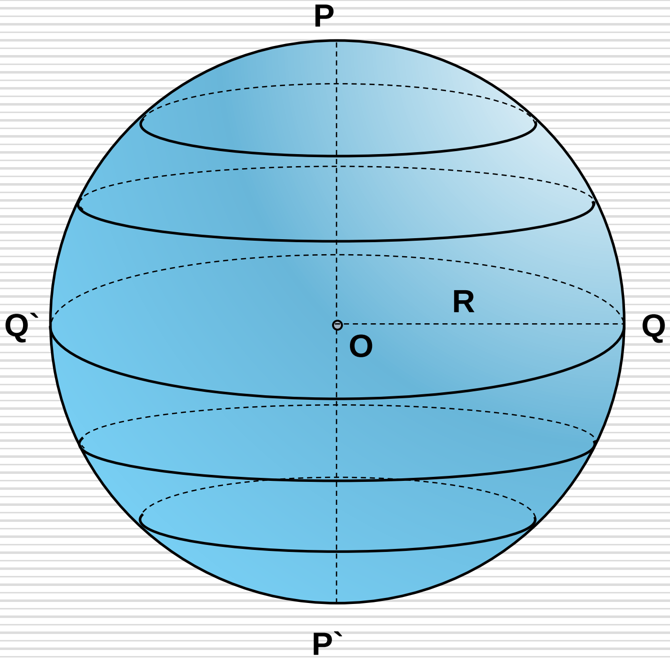
SEÇÕES PLANAS DA ESFERA



Toda e qualquer seção plana da ESFERA será circular.

GEOMETRIA DA ESFERA

PLANO DIAMETRAL E CÍRCULO MÁXIMO – CÍRCULOS MENORES

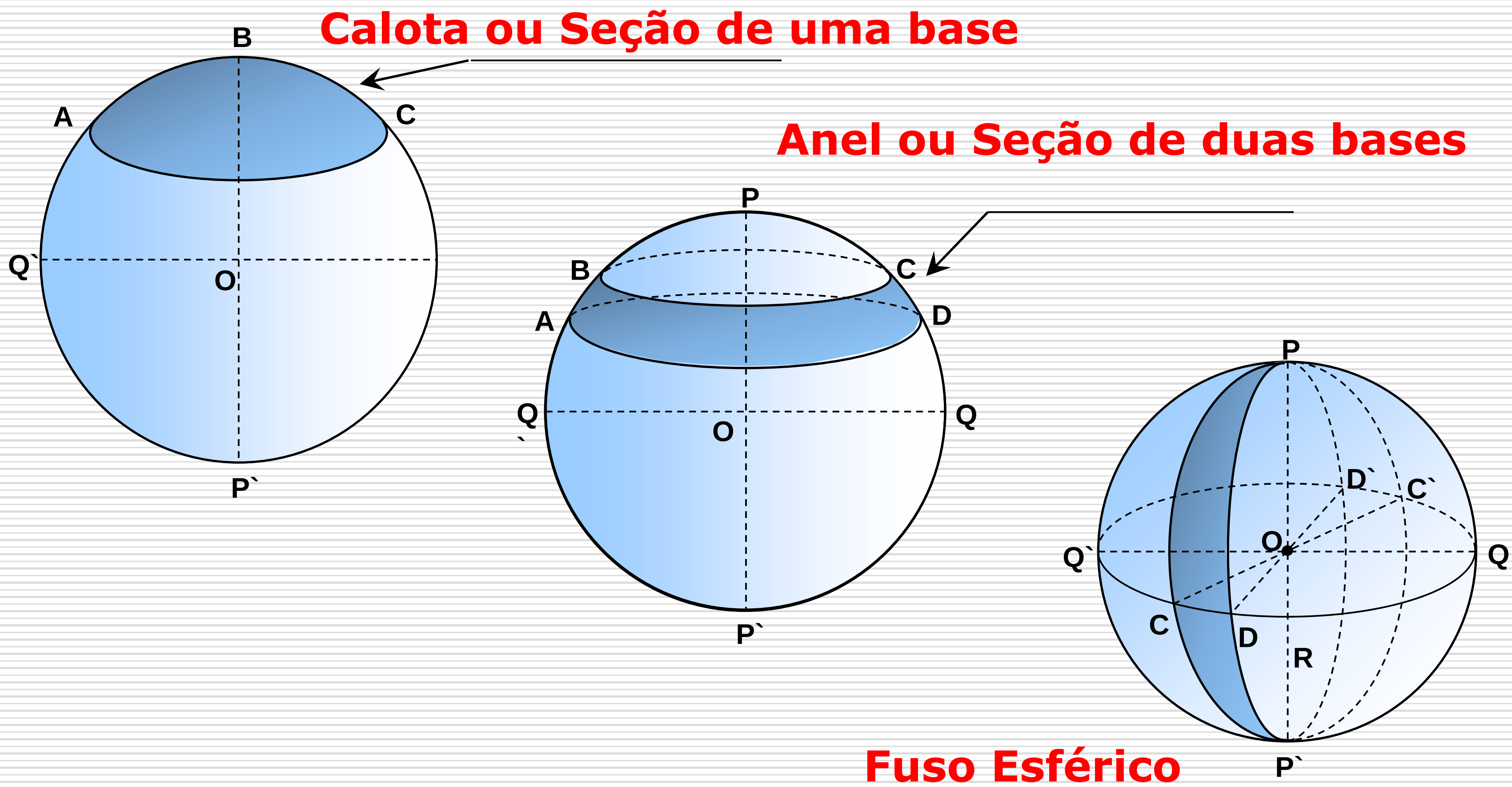


Passando-se pela ESFERA um feixe de planos mutuamente paralelos e ortogonais a um de seus diâmetros, define-se uma família de seções circulares paralelas em que apenas uma delas corresponde a um círculo de mesmo raio da ESFERA, um círculo máximo, todas as demais serão círculos menores.

O plano da seção definidora do círculo máximo conterá o centro da ESFERA e será denominado por plano diametral.

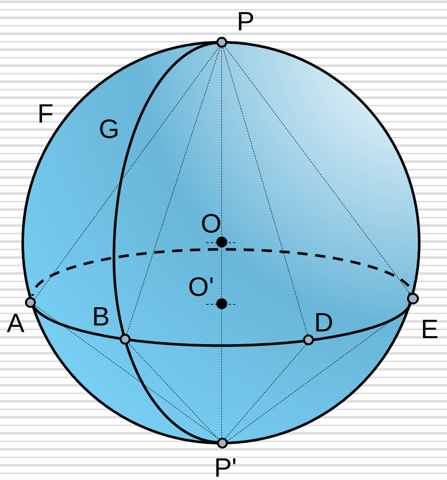
GEOMETRIA DA ESFERA

FIGURAS SOBRE A ESFERA



GEOMETRIA DA ESFERA

PÓLO DE UM CÍRCULO DA ESFERA



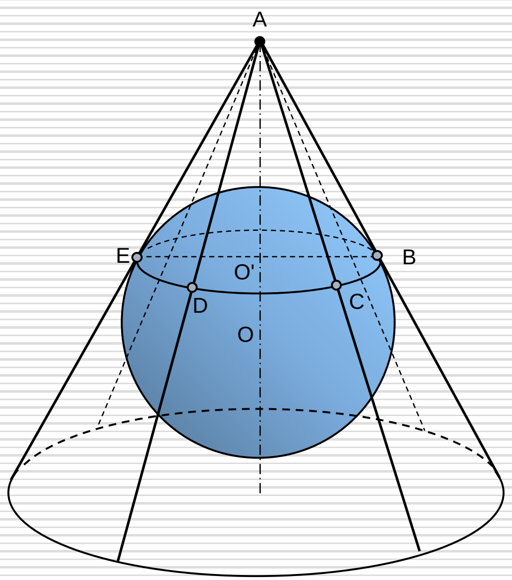
Os pontos extremos de um diâmetro da esfera são denominados pólos de todos os círculos definidos pela interseção de planos que lhe são ortogonais (feixe de planos paralelos entre si e ortogonais ao diâmetro).

Os pontos P e P′ são os pólos do círculo menor ABDE.

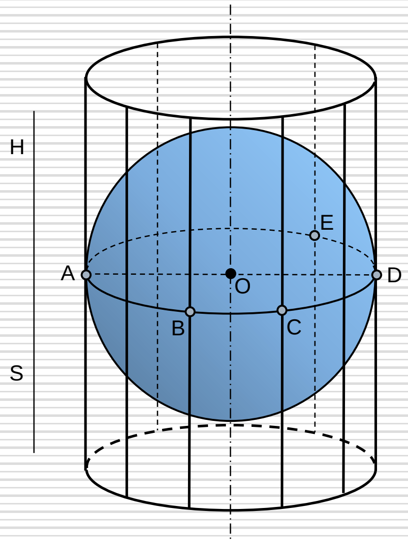
As distâncias AP e AP′, da mesma forma que as distâncias BP e BP′, DP e DP′, ..., são denominadas por distâncias polares.

GEOMETRIA DA ESFERA

RETA TANGENTE À ESFERA



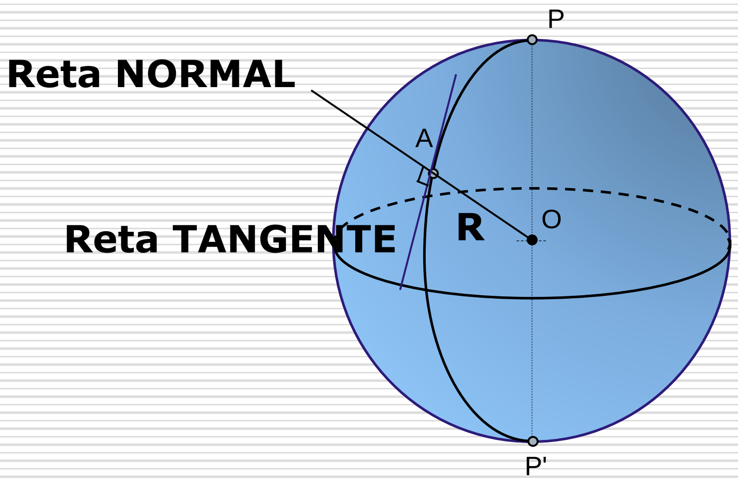
Se em relação a uma reta do espaço tomar-se um conjunto de retas paralelas a mesma e tangentes a esfera, o lugar geométrico dos pontos de tangência será um círculo maior da esfera.



Se de um ponto do espaço tomar-se um feixe de retas tangentes à esfera, o lugar geométrico dos pontos de tangência será um círculo menor da esfera.

GEOMETRIA DA ESFERA

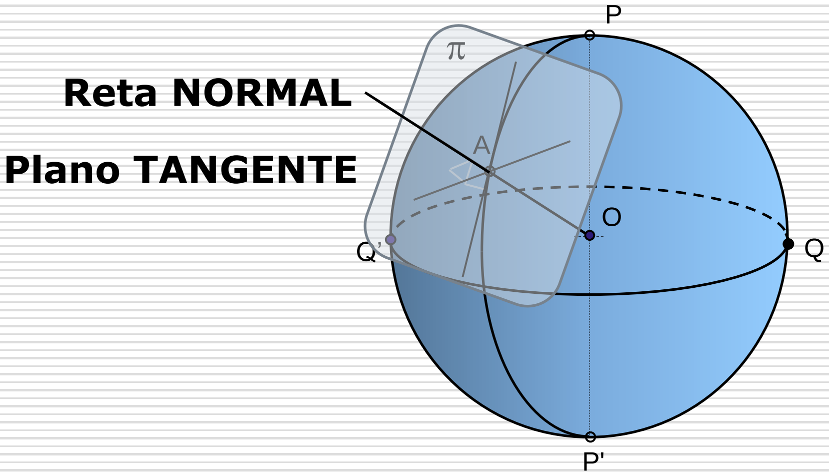
RETA NORMAL A UM PONTO DA ESFERA



As retas são ortogonais no ponto da superfície, extremidade do diâmetro cujo prolongamento define a normal.

GEOMETRIA DA ESFERA

PLANO TANGENTE À ESFERA EM UM PONTO

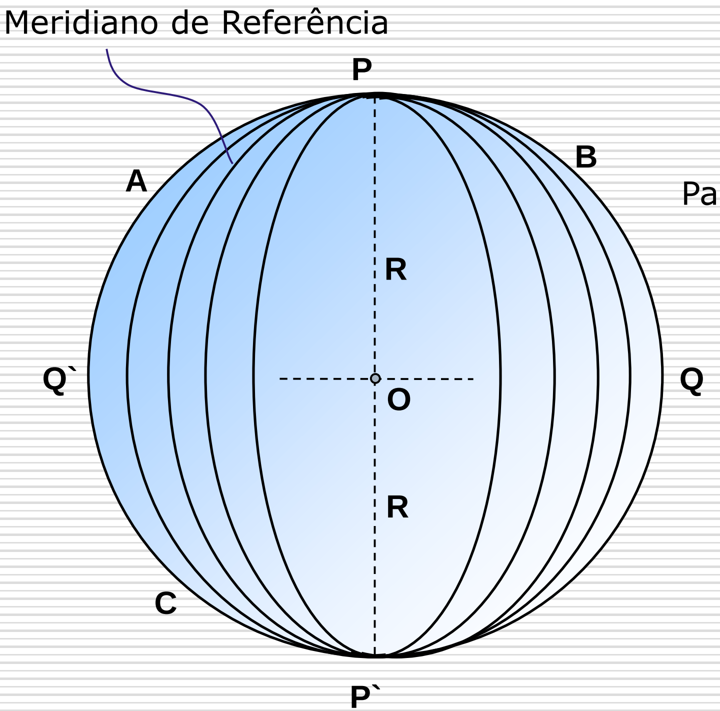


Plano ortogonal à normal e tangente à superfície no ponto.

GEOMETRIA DA ESFERA

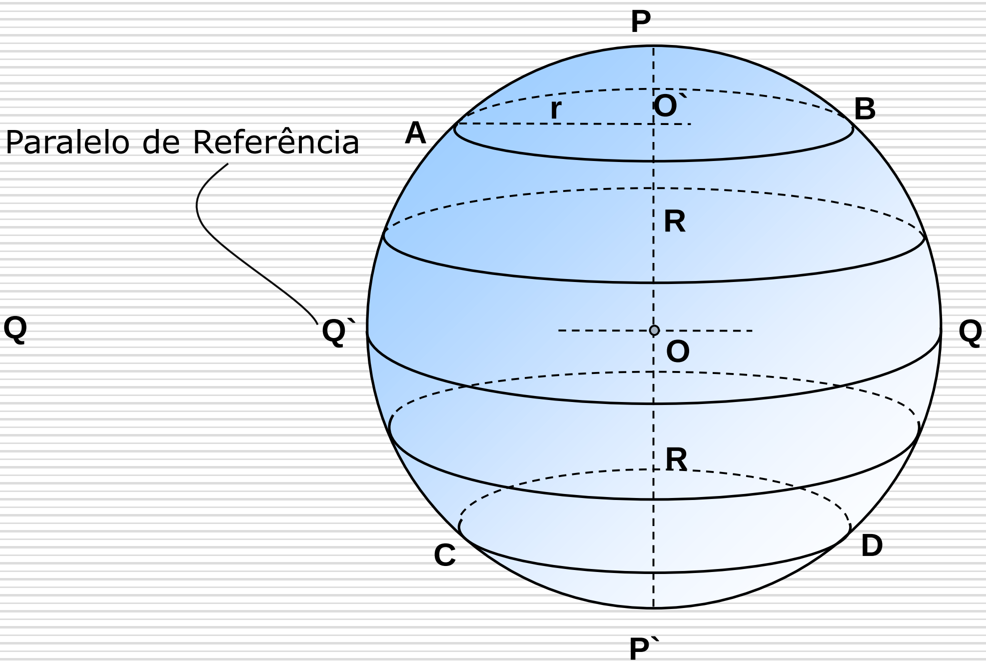
SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS ESFÉRICAS

Meridianos



Longitude

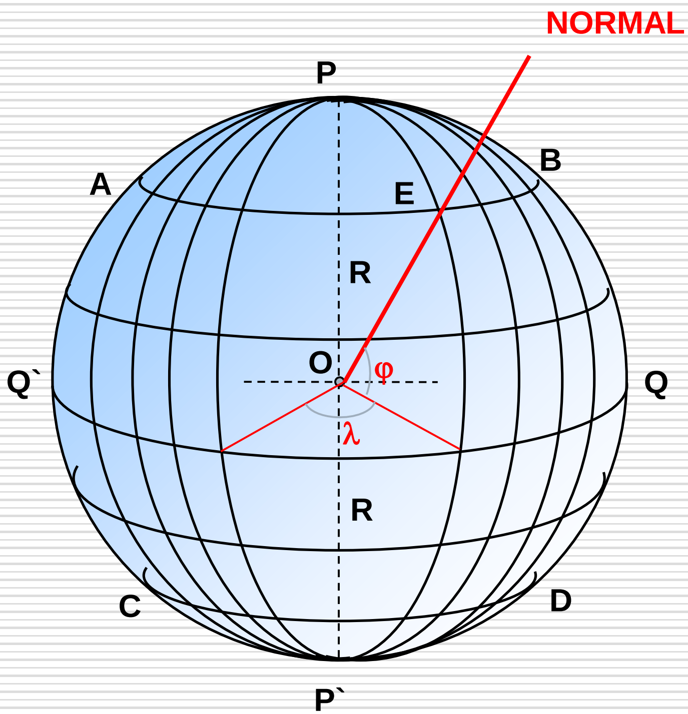
Paralelos



Latitude

GEOMETRIA DA ESFERA

SISTEMA DE COORDENADAS CURVILÍNEAS ESFÉRICAS



COORDENADAS CURVILÍNEAS ou COORDENADAS ESFÉRICAS

- Latitude (φ)

Variação
- Hemisfério Norte [0º;+90º]
- Hemisfério Sul (0º;-90º]

-Longitude (λ)

Variação
- Hemisfério Oriental [0º;+180º]
- Hemisfério Ocidental (0º;-180º)

GEOMETRIA DA ESFERA

LINHA GEODÉSICA OU GEODÉSICA

A linha geodésica, uma curva associada a qualquer superfície, define-se a partir da sua propriedade mais notável:

-A linha geodésica, ou simplesmente geodésica, corresponde a uma curva definida sobre a superfície para a qual em todos os seus pontos a normal à superfície corresponde a normal à curva.

Em decorrência dessa propriedade, a geodésica guarda para quaisquer dois pontos pertencentes à superfície, a menor distância entre eles.

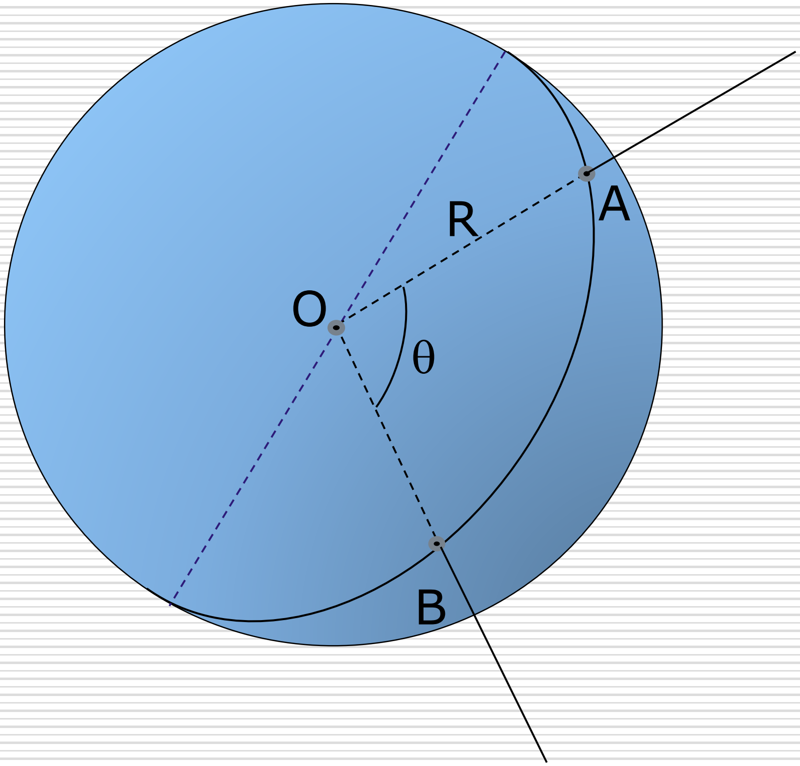
Para a esfera a geodésica corresponderá ao círculo máximo, pois este em todos os seus pontos tem para normal a normal à superfície. Diante disso, o meridiano de longitude e o equador, por serem círculos máximos, exemplificam curvas geodésicas sobre a esfera.

GEOMETRIA DA ESFERA

DISTÂNCIA ESFÉRICA

O círculo máximo como a geodésica sobre a esfera, em decorrência o lugar dos pontos que guardam a menor distância entre si.

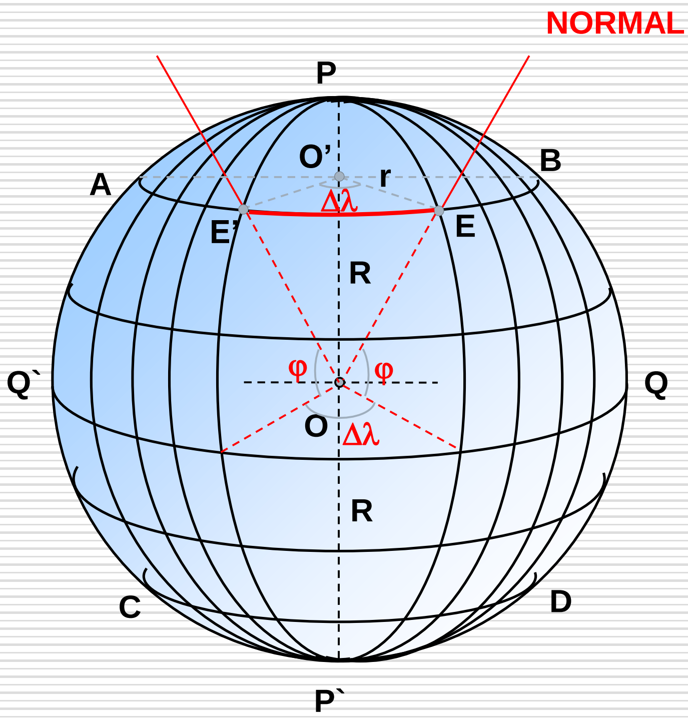
DISTÂNCIA ESFÉRICA igual ao comprimento do arco de círculo máximo correspondente ao setor circular AOB:



$$S_{AB}=R.\theta$$

GEOMETRIA DA ESFERA

Comprimento do Arco de Paralelo

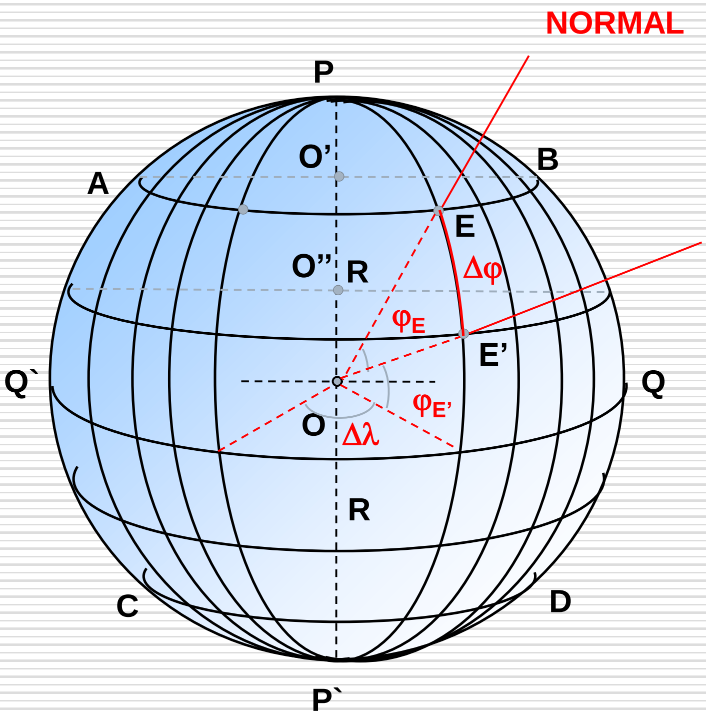


Comprimento do arco de paralelo entre os pontos EE′, sendo o raio do paralelo de latitude igual a (r) e a diferença de longitude entre os pontos Δλ.

$$S_{EE'} = r.\Delta\lambda$$

GEOMETRIA DA ESFERA

Comprimento do Arco de Meridiano

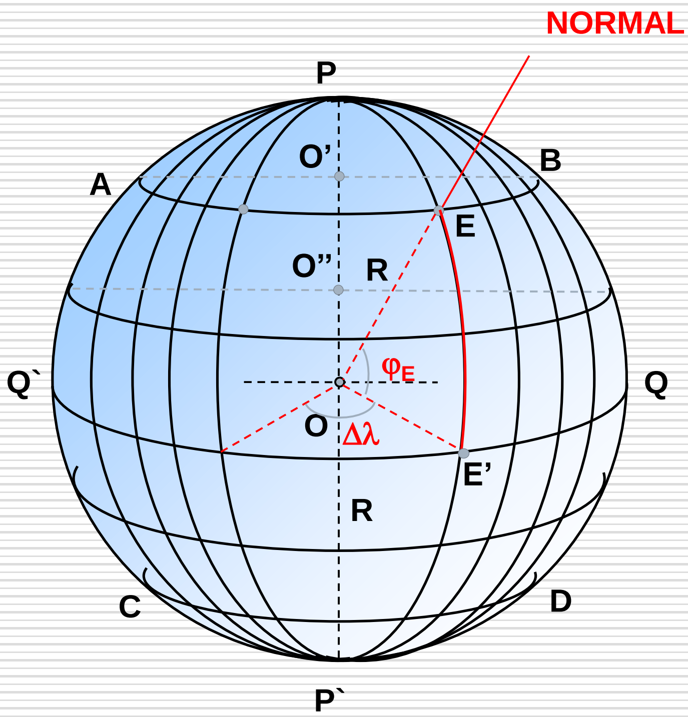


Comprimento do arco de meridiano entre os pontos EE', sendo o raio da esfera igual a (R) e a diferença de latitude entre os pontos $\Delta\varphi$.

$$S_{EE'} = R.\Delta\varphi$$

GEOMETRIA DA ESFERA

Comprimento do Arco de Meridiano

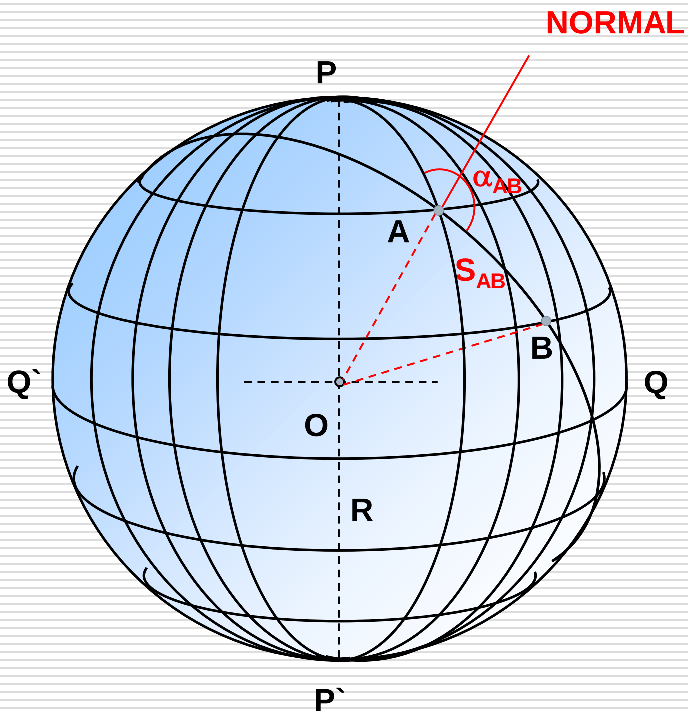


Comprimento do arco de meridiano entre o ponto E e o equador, sendo o raio da esfera igual a (R) e a latitude do ponto E igual a φ.

$$S_{EE'} = R.\varphi_E$$

GEOMETRIA DA ESFERA

COORDENADAS POLARES ESFÉRICAS



Azimute Esférico – ângulo entre o arco de meridiano do ponto A e o arco de círculo máximo que demanda ao ponto B.

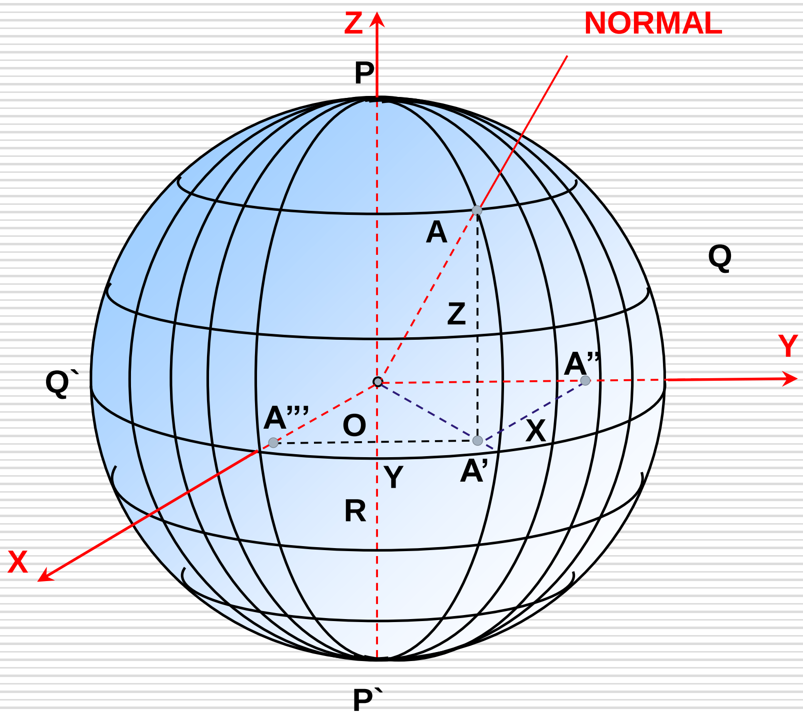
Distância Esférica – comprimento do arco de círculo máximo entre o ponto A e o ponto B.

$B(S_{AB};\alpha_{AB})$

Posição do ponto B relativamente ao ponto A, expressa em coordenadas esféricas polares.

GEOMETRIA DA ESFERA

COORDENADAS CARTESIANAS ESFÉRICAS



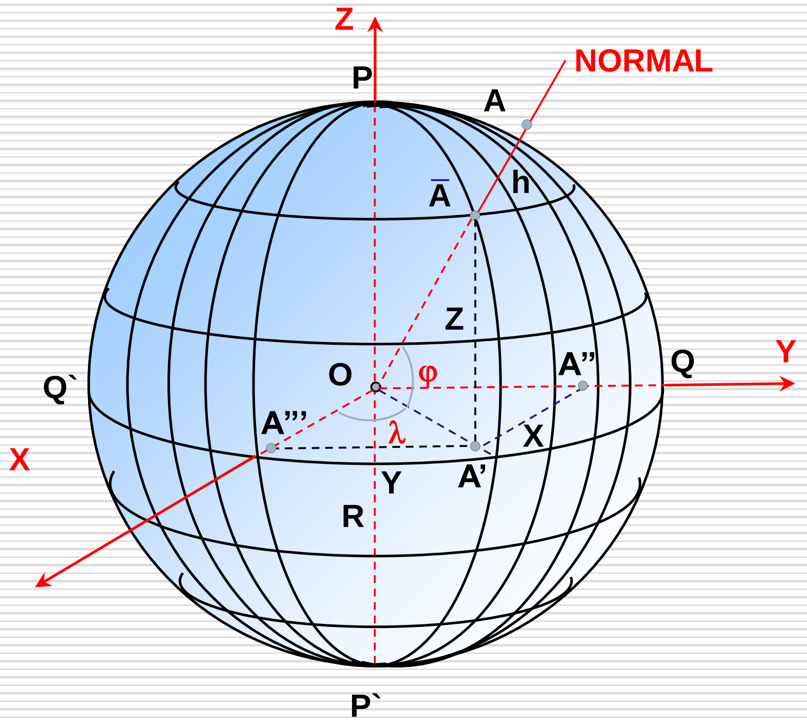
O sistema de coordenadas cartesiano triortogonal, com o eixo Z coincidente com o diâmetro de rotação da esfera e os eixos X e Y jacentes no plano do equador, permite enunciar a posição do ponto genérico A como sendo dada pelo terno de números reais:

A(X;Y;Z)

GEOMETRIA DA ESFERA

TRANSFORMAÇÕES ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Transformação entre coordenadas curvilíneas esféricas e cartesianas esféricas **A(λ;φ;h)→A(X;Y;Z)**

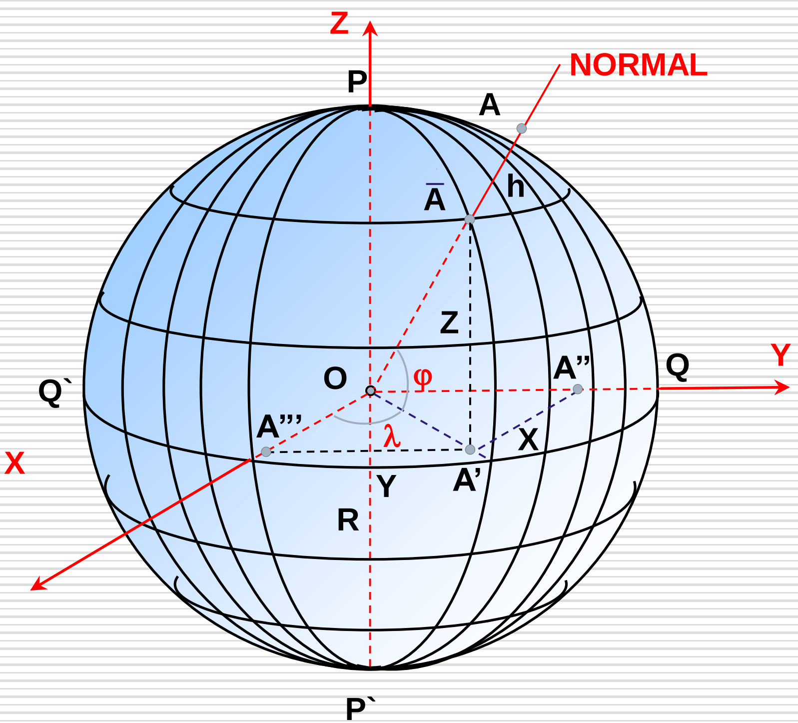


$$x=(R+h)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$y=(R+h)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$z=(R+h)\operatorname{sen}\varphi$$

GEOMETRIA DA ESFERA

TRANSFORMAÇÕES ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Transformação entre coordenadas cartesianas esféricas e curvilíneas esféricas **A(X;Y;Z) → A(λ;φ;h)**



$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Em latitudes médias e baixas:

$$h = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\varphi} - R$$

Em latitudes médias e altas:

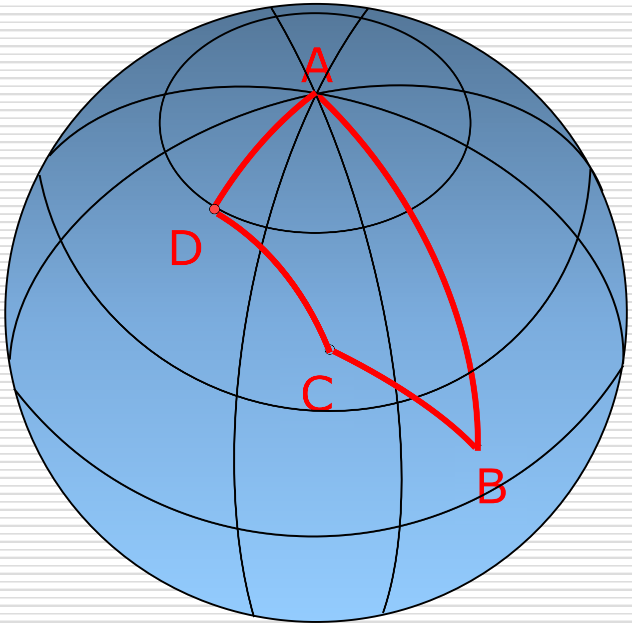
$$h = \frac{z}{\sin\varphi} - R$$

GEOMETRIA DA ESFERA

POLÍGONO ESFÉRICO

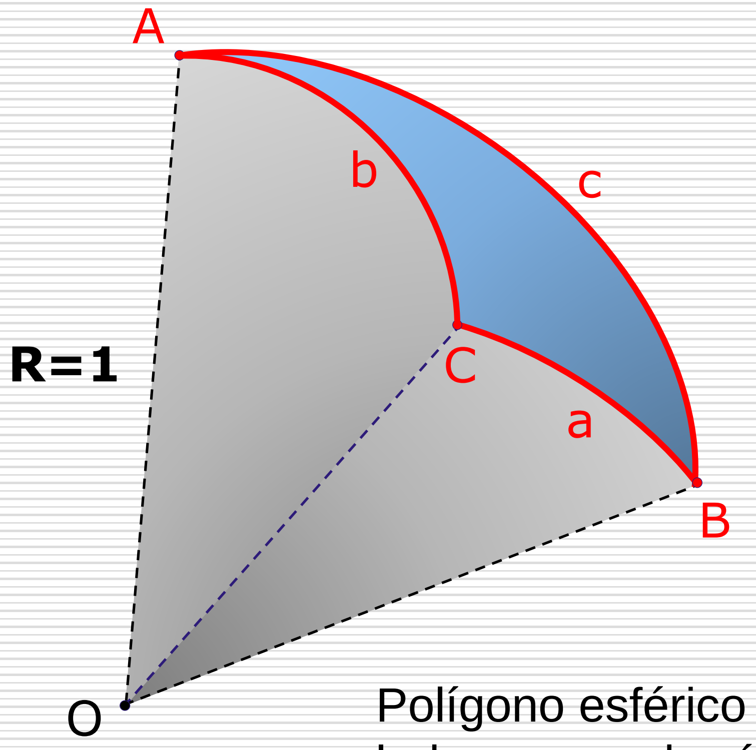
Polígono esférico de n lados, formados por arcos de círculos máximo.

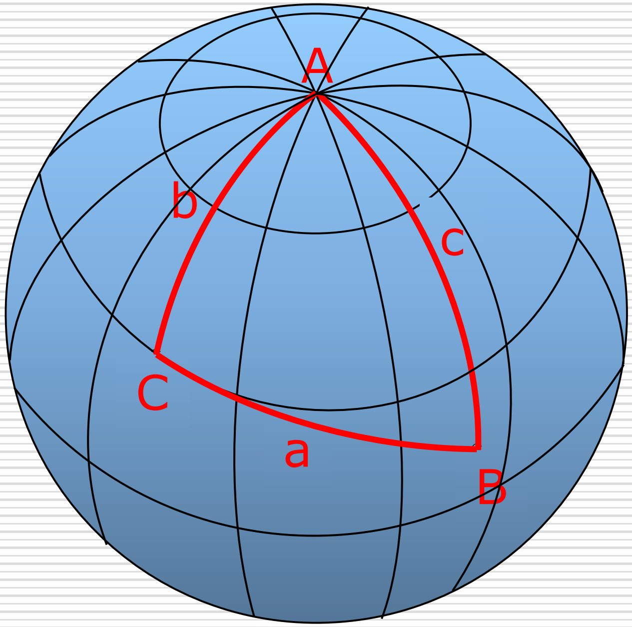
Os lados contém a menor distância que separa os vértices que o formam.



GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO

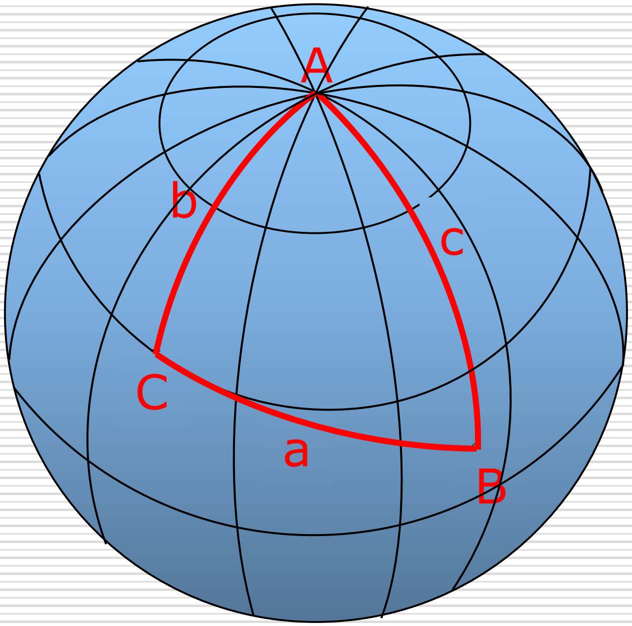




Polígono esférico formado por três lados, arcos de círculos máximo.

GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO



Resolver o triângulo esférico significa tornar conhecidos os seis parâmetros definidores do triângulo (os três lados e os três ângulos).

Lados: a, d e c

Ângulos: A, B e C

GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO – Propriedade dos Lados

O perímetro do triângulo esférico é menor do que quatro retos:

-designando o perímetro por 2p, vem:

$a+b+c<360^o$ ou $2p<360^o$

ou seja, a soma dos lados de um triângulo esférico é menor do que a circunferência de um grande círculo.

- a soma de qualquer dois lados é maior que o terceiro:

$a+b>c$		$c<a+b$		$c>a-b$
$a+c>b$	ou	$b<a+c$	e, ainda	$b>a-c$
$b+c>a$		$a<b+c$		$a>b-c$

Defeito Esférico – denomina-se por defeito esférico ao replemento do perímetro do triângulo esférico, ou seja:

$\delta=360^o-(a+b+c)=360^o-2p$

GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO – Propriedade dos Ângulos

A soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior do que dois retos e inferior a seis retos:

- $180^\circ<(A+B+C)<540^\circ$

- todo ângulo de um triângulo esférico aumentado de dois retos é maior que a soma dos outros dois ângulos:

$A+B<180^\circ+C$ $180^\circ+C>A+B$

$A+C<180^\circ+B$ ou $180^\circ+B>A+C$

$B+C<180^\circ+A$ $180^\circ+A>B+C$

Excesso Esférico – denomina-se por excesso esférico a quantidade que excede a dois retos na soma dos ângulos de um triângulo esférico:

$\varepsilon= (A+B+C)-180^\circ$

GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO EULERIANO

Por mera convenção considera-se que nos triângulos esféricos cada lado é menor do que um semicírculo (<180º). Nessas condições o triângulo é dito euleriano.

Diante da convenção anterior, qualquer ângulo de um triângulo esférico será menor que dois retos.

Aos maiores ângulos corresponderão os maiores lados, em via inversa, aos maiores lados corresponderão os maiores ângulos.

GEOMETRIA DA ESFERA

TIPOS DE TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Triângulo esférico retângulo – possuí ao menos um ângulo igual a um reto.

Triângulo esférico retilátero – possuí um lado com o comprimento igual a um reto. Também são denominados por quadrantais .

Triângulo esférico biretângulo – possuí dois ângulos iguais a 90º, em decorrência, os lados opostos a esses ângulos assumem o comprimento de 90º, o que leva a denominar-se aos mesmos, também, de triângulos biretiláteros.

Triângulo esférico triretângulo – possuí os três ângulos retos, o que leva aos três lados a assumirem o comprimento igual a um reto, justificando-se em tal fato a denominação alternativa de triângulos triretiláteros.

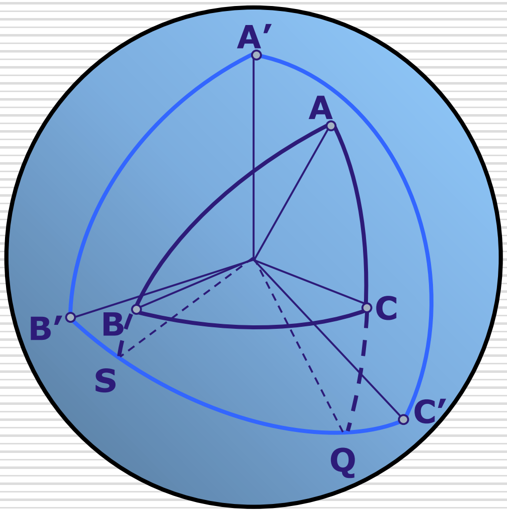
Triângulo esférico equilátero – possuí os três lados iguais.

Triângulo esférico isósceles – possuí dois ângulos iguais.

GEOMETRIA DA ESFERA

TRIÂNGULO ESFÉRICO POLAR

Triângulo esférico A’B’C’ polar do triângulo esférico ABC.



Entende-se o triedro polar de um triedro dado como sendo aquele formado pelas semi-retas perpendiculares a cada uma das faces do triedro dado, e que contém o vértice do mesmo.
O ângulo formado pelas normais às faces de um diedro, é suplementar do ângulo diedro dado. Por outro lado, as faces de um triedro são suplementares dos diedros correspondentes no seu triedro polar, ou seja:

$$\hat{A}' = 180^o - a \qquad a' = 180^o - \hat{A}$$

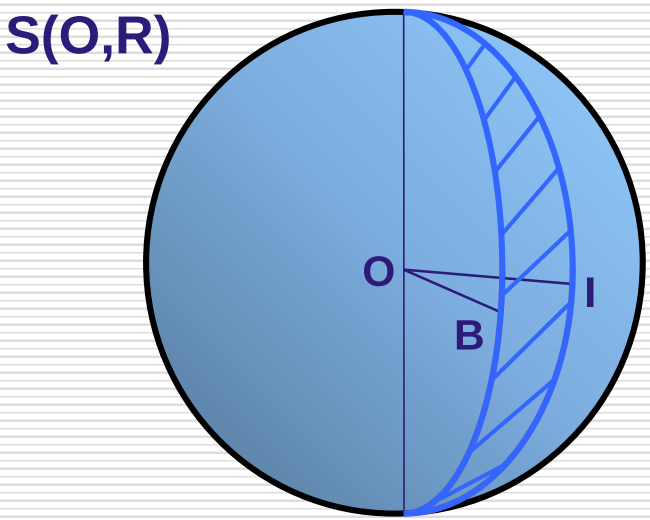
$$\hat{B}' = 180^o - b \qquad b' = 180^o - \hat{B}$$

$$\hat{C}' = 180^o - c \qquad c' = 180^o - \hat{C}$$

GEOMETRIA DA ESFERA

ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Denomina-se por FUSO ESFÉRICO à porção da superfície esférica limitada por dois semi-círculos máximos que têm um diâmetro comum. O ângulo do fuso é o ângulo diedro formado pelos planos dos semi círculos máximos citados, mede-se pelo arco BI, cujo pólo é o vértice P do fuso.



Fuso de ângulo BOI

GEOMETRIA DA ESFERA

ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

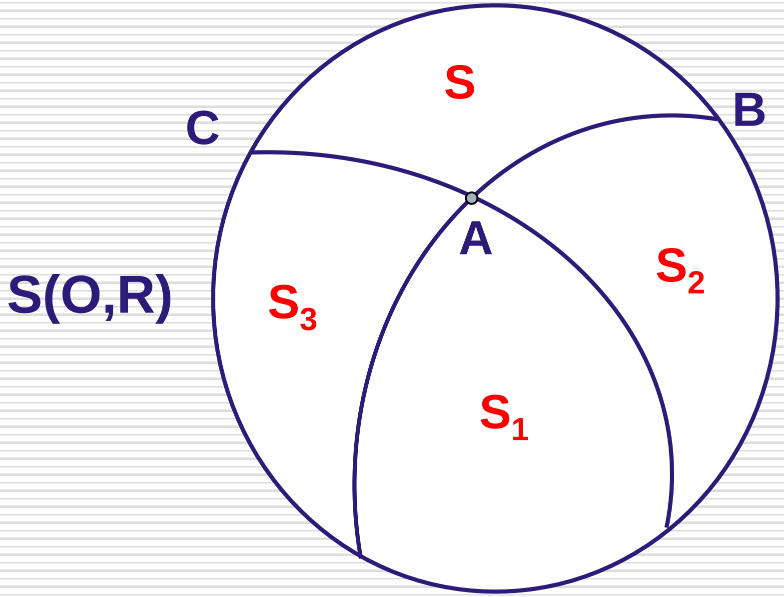
A área do fuso está para a área da esfera assim como o ângulo do fuso está para quatro retos, logo para a área f do fuso de n graus, vem:

$$f = \frac{4\pi R^2 n^0}{360^0} = \frac{\pi R^2 n^0}{90^0}$$

GEOMETRIA DA ESFERA

ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Seja a esfera S(O,R) sobre a qual se faz passar três planos contendo A e interceptando-se dois a dois sob um ângulo de 90º. Teremos, por essa construção, oito triângulos esféricos triretiláteros ou triretângulos. Consideremos a visão do polo, de sorte que quatro deles são visíveis.



GEOMETRIA DA ESFERA

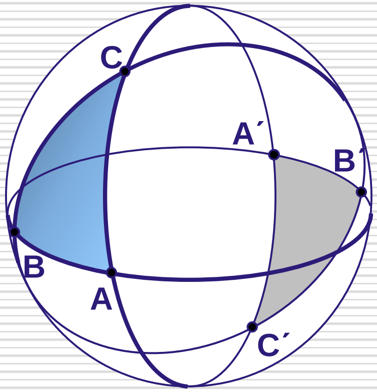
ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

ÁREA DOS FUSOS

$$S + S_1 = f_A$$

$$S + S_2 = f_B$$

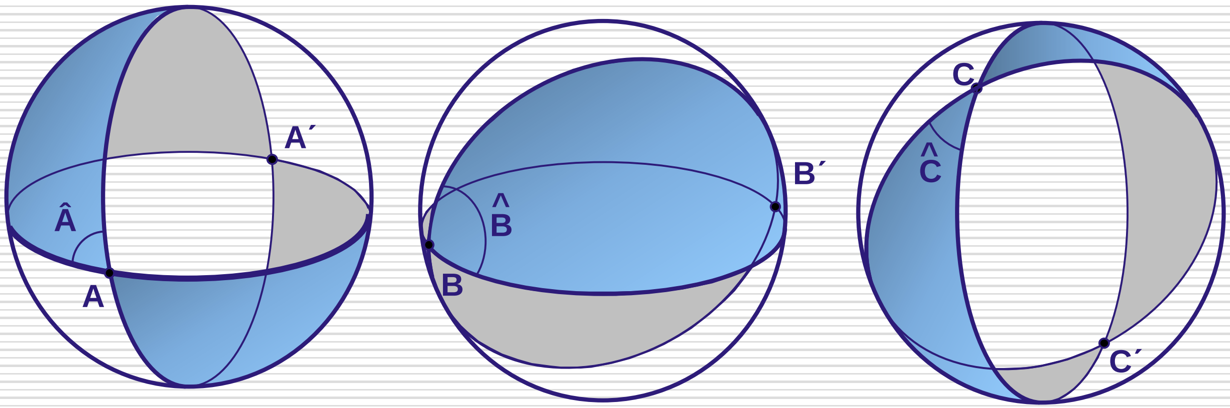
$$S + S_3 = f_C$$



$$f_A = \frac{\pi R^2 \hat{A}}{90^o}$$

$$f_B = \frac{\pi R^2 \hat{B}}{90^o}$$

$$f_C = \frac{\pi R^2 \hat{C}}{90^o}$$



GEOMETRIA DA ESFERA

ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Substituindo os valores das áreas dos fusos nas expressões das áreas S, obtem-se para o cálculo da área do triângulo esférico a expressão:

$$S = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^o}$$

em que ε é o excesso esférico:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^o = \varepsilon$$

GEOMETRIA DA ESFERA

ÁREA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

A expressão algébrica abaixo, devida ao matemático francês L´HUILLIER, permite o cálculo da área do triângulo esférico, conhecidos os lados do triângulo, tomando-se o excesso esférico em função do perímetro:

$$\tan^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \tan\frac{1}{2}p \tan\frac{1}{2}(p-a) \tan\frac{1}{2}(p-b) \tan\frac{1}{2}(p-c)$$

lembrando que o perímetro é calculado a partir da expressão: 2p=a+b+c. Como deduzido anteriormente, a área do triângulo será expressa por:

$$S = \frac{\pi R^2 \varepsilon}{180^o}$$